Priroda matematičkih entiteta

Lacko, Dorian

Sveučilište u Rijeci

Filozofski fakultet u Rijeci

Rijeka

Priroda matematičkih entiteta

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Boran Berčić

Student: Dorian Lacko

Studijska grupa: Filozofija/povijest

Rijeka, 2017.

SADRŽAJ

1. Sažetak

Za početak predstavio sam dvije dijametralno suprotstavljene pozicije platonizma i naturalizma. S jedne strane platonizam tvrdi da brojevi i matematički entiteti postoje na zaseban način izvan prostora i vremena, dok naturalizam postulira da su metode prirodnih znanosti mjera za svako ispitivanje, odnosno da je osjetilno iskustvo jedini pravi izvor informacija. Lako je već vidjeti opozicioni smještaj ovih dviju teorija. Nakon što sam pobliže predstavio svaku teoriju krenuo sam na same argumente. Na široko sam izložio Benacerrafov argument jer mi je on centar rada. Ukratko, ako je uzročna teorija znanja točna, a matematički objekti po definiciji apstraktni i samim time izvan kauzalne veze onda je matematičko znanje nemoguće. Radi shvaćanja argumenta morao sam pobliže predstaviti uzročnu teoriju znanja koja izgleda i sama ima rupe. Uspio sam obraniti platonizam argumentom iz kvantne mehanike, što je poznati eksperiment Einsteina, Podolskog i Rosena. Nakon toga ušao sam u ontološku sferu gdje teorija skupova i mogućnost više načina reduciranja radi nezanemarivu štetu za matematički platonizam. Na kraju dao sam kratki prikaz pogleda Kurta Gödela na raspravu gdje je epistemologija matematike u korelaciji s epistemologijom prirodnih znanosti.

2. Ključne riječi:

epistemološki argument, ontološki argument, Benacerrafov problem, uzročna teorija znanja, percepcija, matematički entiteti, teorija skupova, platonizam, naturalizam

2. Uvod

Ukoliko tvrdimo neki matematički iskaz netko bi nas s pravom mogao upitati što taj iskaz čini istinitim ili lažnim? Što je to nešto što iskaz poput „5 + 7 = 12“ čini istinitim ? Kakva je priroda toga nečega ? Već nadaleko možemo osjetiti ontološku suštinu pitanja. No, ova ontološka pitanja u čvrstoj su povezanosti s epistemološkim problemima matematike. Odnosno, dolazimo do pitanja, kako spoznajemo matematičke istine? Kako spoznajemo matematičke entitete? O kakvoj vrsti spoznaje se radi? Spoznajemo li to iskustvenim putem, čistim racionalnim uvidom , ili postoji neka treća opcija?

U ovom radu bavio sam se upravo ovim pitanjima, ali prvenstveno kroz prizmu matematičkog platonizma.

3. Platonizam *vs* naturalizam

Započet ću sa izlaganjem dvije suprotstavljene pozicije u filozofiji matematike. Jedna je pozicija platonizma, a s druge strane pozicija naturalizma. Prvo ću nešto reći o samim pojmovima, a kasnije ulazim u dublju analizu istih i njihovih odrednica. Naturalizam je teorija koja tvrdi da bi metode prirodnih znanosti trebale biti jedini pravi model za svako ispitivanje. To bi značilo da je naše osjetilno iskustvo jedini pravi izvor informacija i da su materijalni predmeti koji se nalaze u prostorno - vremenskom okviru jedine stvari koje imaju plauzibilnost postojanja. „Sve što tvrdimo da znamo, kao što je recimo etika ili matematika, mora na neki način biti u skladu s ovim.[1] „Platonizam je veoma drugačiji pogled, da brojevi, funkcije i ostali apstraktni entiteti postoje na svoj zaseban način i da ima mnogo načina kako ih spoznajemo i učimo o njima,

[1] Brown, 2012, str. 3

uključujući intuiciju, odnosno neku vrstu percepcije sa „umnim okom“.[2] Neki od naturalista, od kojih je značajniji Quine, će ipak pristati na postojanje apstraktnih entiteta, ali neće ići tako daleko da prihvati spoznavanje intuicijom i mogućnost a priori znanja.

Sada ću ući malo detaljnije u poziciju naturalizma. Ukratko, moglo bi ju predstaviti ovako: „Sve činjenice su prirodne činjenice i jedino prirodne znanosti ih mogu otkriti i objasniti“.[3] Međutim, da ne ostavimo ovo tako krnje, prikazat ću neke najbitnije odrednice ove teorije:

> “1. Svo znanje zasnovano je na osjetilnom iskustvu. Ne postoji a priori izvor informacija. Dakle, možemo reći da naturalizam prihvaća empiricizam.
> 2. Nema nekog čvrstog temelja znanja, ne postoji jedan izvor znanja na čemu sve ostalo počiva.
> 3. Proces stjecanja znanja je pogrešiv i rezultati su nesigurni i subjekti revizija u slučaju daljnjeg, novog dokaza.
> 4. Metode prirodnih znanosti su jedan i jedini način da se stekne bilo kakvo znanje.” (Brown 2012: 32)

Brown jasno sažima bit naturalizma u pogledu matematike:„Ako postoji jedna stvar koja je zajednička svim matematičkim naturalistima, je to da ne postoji takva stvar kao što je „intelektualno zahvaćanje“ matematičkih entiteta ili „viđenje sa umnim okom“.“[4]

Brown navodi Wittgensteinove stavove o odnosu prirodne znanosti i filozofije: “Što se tiče odnosa između znanosti i filozofije Wittgenstein je tvrdio, „Filozofija nije jedna od prirodnih znanosti“ i također „Filozofija cilja na logičko razjašnjenje naše misli“. U kasnijim radovima, kao što su Filozofska

[2] Brown, 2012, str. 3
[3] Brown, 2012, str. 30
[4] Brown, 2012, str. 33

Istraživanja, vidio je filozofiju kao vrstu terapije koja nam pomaže da vidimo izlaz iz konfuzije koju sami stvaramo. Ni u kojem slučaju, po Wittgensteinu, filozofija nije u paru sa prirodnim znanostima. Naturalisti tipično odbacuju pristupe kao što je Wittgensteinov i stavljaju filozofiju eksplicitno u par sa fizikom i biologijom." (Brown 2012: 33)

Filozofija, po Wittgensteinu, nikako ne može biti u istom kutu sa prirodnim znanostima. Naturalisti se tome radikalno suprotstavljaju i smatraju da bi se filozofija i filozofske metode trebale čim više približiti prirodnim znanostima. Upravo to je osnovna komponenta njihove doktrine. U nastavku Brown navodi još tri važne karakteristike platonizma:

> „5. Znanje je nešto što otkrivamo, nije naša ljudska konstrukcija ili invencija.
>
> 6. Ono što postoji je ono što istinska znanost kaže da postoji." (Brown 2012: 34)

Naturalisti tvrde da sve entitete koje znanost ne može identificirati i locirati i koji prelaze granice znanstvene spoznaje jednostavno treba odbaciti. Prijašnja filozofska tradicija imala je tendenciju postaviti takve entitete kao moguće i realne, kao dio svog filozofskog sustava. Međutim, takvi entiteti ne prolaze kroz naturalističku analizu, pošto su oni nedostižni metodama empirijskog, znanstvenog istraživanja. „Ako krenemo tražiti broj 27 kao što bi išli tražiti kita ili virus koji uzrokuje HIV, pronašli bi ga nigdje"[5], tvrde naturalisti. Složili bi se sa Humeom da takve „sofisterije" naprosto treba prepustiti plamenu; ili, možda malo manje radikalno, da revidiramo naše razumijevanje brojeva tako da bude više u skladu sa znanstvenim pogledom.

[5] Brown, 2012, str. 34

Također, naturalisti imaju veoma specifične stavove po pitanju norma i vrijednosti koji su imali ogroman utjecaj na razvoj filozofskog pejzaža tog vremena. Njihove su implikacije rezultirale snažnom promjenom struje u diskursu, pogotovo u etici. Po naturalistu, ozbiljno se jedino može pričati o objektivno-opisnim stvarima unutar doticaja znanosti, dok su etičke norme nešto što je empirijski neanalizibilno i ne ulazi u tu sliku. Smatraju da bi se takve norme trebale reinterpretirati na egzaktniji način.

7. Norme i vrijednosti moraju biti eliminirane ili nekako reducirane na činjenične iskaze. Ne postoje ne-prirodne činjenice. Ovo uključuje oboje, moralne norme i epistemičke norme.

Ovo je usmjereno protiv vjerovanja koja većina nas drži, kao što su „Ubojstvo je pogrešno“; „Nemoj vjerovati kontradiktornim teorijama“; „Prihvati teoriju sa najvećom empirijskom preciznošću“. To su norme, neke moralne, neke epistemičke. Naturalisti ili ih odbacuje, ili ih pokušavaju reinterpretirati u nekom naturalističkom prihvatljivom načinu. Ne zato jer vjeruju „Ubojstvo je ispravno“, nego zato što norme ne pristaju u naturalističku sliku realnosti. Ne možemo vidjeti normu, ne niti u proširenom smislu u kojem možeš vidjeti elektron. Jedna je stvar držati standard duljine kao što je metarski štap pod staklom u Parizu, ali standardi dobrog ponašanja nisu locirani nigdje, i oni ne mogu biti empirijski provjereni. Otuda naturalistička antipatija prema bilo čemu normativnom.” (Brown 2012: 34)

Naveo sam glavne odrednice naturalizma i njegovu suštinsku teoriju. Sad krećem na platonizam. „Zastupnici platonizma u filozofiji matematike tvrde da matematika opisuje vječnu i nepromjenjivu matematičku stvarnost koja postoji izvan vremena i prostora.“[6] Ono o čemu govore rečenice matematike i to što čini njihovu istinitost je upravo to da su dio te jedinstvene matematičke stvarnosti. Matematički objekti su po svojoj definiciji idealni i apstraktni, a samim time, oni postoje izvan prostorno-vremenske zadanosti. „Neovisno o načinu na koji govorimo ili mislimo o njima; brojevi, skupovi, funkcije, trokuti, krugovi, integrali, pravci, matrice i drugi matematički predmeti postoje objektivno.“[7] Također, oni postoje, sami za sebe, neovisni o materijalnim predmetima koji se nalaze unutar prostorno-vremenskog kontiniuuma. Uz to, oni su nepromjenjivi i vječni. Sve u svemu, postoji jedna zasebna oblast matematičkog realiteta, koja se razlikuje od svega ostalog što smatramo da postoji. Intuicijom i matematičkim istraživanjem matematičar otkriva taj matematički realitet koji je postojao davno prije njega i koji postoji neovisno od umova drugih pa i njega samog. „Otkrića u matematici u principu su iste vrste kao i otkrića u geografiji ili fizici.“[8] „Pitagora je otkrio da $a^2+b^2=c^2$ baš kao što je Kolumbo otkrio Ameriku.“[9] Po platonistu, kada ostvarimo neko otkriće u matematici, ono nije rezultat našeg konstruiranja, nego otkrivanja.

Prikazat ću i neke najbitnije značajke platonizma kao teorije da približim aspekte onih koji bi sebe nazvali matematičkim platonistima.

> “1. Matematički objekti su stvarni i postoje nezavisno od nas; štoviše, matematički iskazi su objektivno istiniti ili lažni i njihova istinosna vrijednost je jednako nezavisna od nas i naših metoda procjenjivanja.
>
> 2. Matematički objekti su izvan vremena i prostora.
>
> 3. Matematički entiteti su apstraktni.“ (Brown 2012: 45)

[6] Berčić, 2012, str. 950
[7] Berčić, 2012, str. 950
[8] Berčić, 2012, str. 950
[9] Berčić, 2012, str. 950

Kada kažemo riječ apstraktan to može značiti dvije različite stvari. Ako se referiramo na skolastičke rasprave iz srednjeg vijeka mislimo na odnos između univerzalnog i partikularnog, preciznije univerzalija i partikularija. Vidimo zeleno drveće, zelenog skakavca i zelenu travu pa smatramo da postoji apstraktni pojam „zelenosti“. Bilo bi to ono „suštinsko“ koje se nalazi u „pojedinačnome“. Matematičke entitete ne smatramo apstraktnima u tome smislu. Svaki broj je jedan, jedinstven i stoga, partikularan, ne univerzalan. Pod trenutnim smislom korištenja riječi „apstraktno“, prvenstveno mislimo na izbivanje entiteta izvan prostorno-vremenskog okvira, odnosno za nešto nematerijalno i ne-fizičko.

U ovom smislu svi matematički objekti su apstraktni. Jednostavan argument ide tome u prilog: postoje neograničeno mnogo brojeva i ostalih matematičkih entiteta, ali ograničen broj fizičkih entiteta; dakle većina matematičkih entiteta mora biti ne-fizičko.” (Brown 2012: 45)

Razuman zaključak je da svi brojevi pa i svi ostali matematički objekti jesu apstraktni. Prve tri točke su ontološke prirode, dakle, one govore o postojanju matematičkih entiteta. Ostale točke su epistemičke prirode, one govore o matematičkoj spoznaji.

“4. Možemo intuicijom spoznati matematičke objekte i zahvatiti matematičke istine. Odnosno, matematički entiteti mogu biti percipirani ili dokučeni sa „umnim okom“. ...

5. Matematika je *a priori,* ne empirijska.” (Brown 2012: 46)

Točka 5 je uobičajena i poznata u filozofskoj tradiciji. Od Platona, Descartesa, Leibniza i ostalih, matematika se uzimala kao paradigmatski primjer apriorne spoznaje. Matematičke istine zahvaćaju se čistim razumom, bez osjetilnog iskustva.

Brown razdvaja izvjesnost (certainty) od nužnosti (necessity):

> "6. Iako je matematika a priori, ne treba biti izvjesna.
>
> 7. Matematičke istine su nužne istine.
>
> Koncepti a priori znanja, nepogrešivosti i nužnosti su sasvim različiti koncepti. Umno oko je subjekt promjene stvaranja koncepta, isto kao što su i osjetilna iskustva. Koncepti su revidirani u svjetlu matematičkog iskustva , isto kao što su fizički koncepti revidirani u svjetlu empirijskog, znanstvenog iskustva. Matematički aksiomi su često pretpostavke, ne samo-evidentne istine, predložene da se ulovi što je intuitivno zahvaćeno. Pretpostavljanje u matematici je jednako pogrešivo kao što je u znanosti. Štogod da su istine matematike, one su nužne; ne postoji drugi način na koji bi mogle biti. Mi otkrivamo te nužne istine na pogrešiv a priori način." (Brown 2012: 46)

Matematičar kada otkriva matematičke istine često dolazi do pogrešaka u svojim pretpostavkama, no to ne potkopava nužnost matematičkih iskaza. Neki filozofi smatraju da je problem pogrešivosti u matematici kamen spoticanja za platonističke teorije, pošto bi istine matematike trebale biti „samo-evidentne". No, mogućnost pogreške jednaka je u matematici kao i bilo gdje drugdje. Matematička istina je nužna, odnosno ne može biti drugačija. Međutim, dolazimo do nje na „pogrešiv način". Ovo su glavni sastojci matematičkog platonizma i oni trebaju biti na umu kada se uspoređuje sa naturalističkim pogledima. Sada, pošto sam pobliže predstavio obje pozicije krećem na samu argumentaciju.

5. Epistemološki argument

Paul Benacerraf, 1973. člankom „Mathematical Truth“ skrenuo je pažnju filozofa na osnovni epistemološki problem platonizma. Benacerraf je izložio argument iz kauzalne inertnosti apstraktnih predmeta. „Možemo ga ukratko prikazati ovako: ako je uzročna teorija znanja točna, i matematički objekti su apstraktni i stoga kauzalno inertni, onda je matematičko znanje nemoguće.“[10] „Povlačimo zaključak, pošto imamo matematičko znanje, platonizam je neodrživ.“[11] Ovaj se problem za platonizam u matematici naziva Benacerrafov problem.

> “Neće biti iznenađenje, da je ovo bio uvod u svrhu isticanja da kombinirajući ovaj pogled na znanje sa „standardnim“ pogledom matematičkih istina čini teškim uvidjeti kako je matematičko znanje moguće. Ako, na primjer, su brojevi te vrste entiteta za koje se normalno uzimaju da jesu, onda veza između uvjeta istinitosti za iskaze brojevne teorije i bilo kojih relevantnih događaja povezanih s ljudima koji bi trebali imati matematičko znanje ne može biti napravljena.” (Benacerraf 1973: 673)

Berčić jasno izlaže osnovni problem za platonizam: „Problem koji se pojavljuje kod platonizma u matematici, jest u tome što nije jasno kakvi su ti navodni idealni matematički predmeti. Postavlja se pitanje kako i na koji način postoje? Gdje se točno nalaze, odnosno imaju li lokaciju? Što to znači kada kažemo da nešto postoji izvan vremena i prostora? Možemo razumjeti postojanje predmeta koji imaju neku dimenziju i koji se negdje nalaze. No, kako shvatiti to kada nam platonisti tvrde da nešto postoji izvan vremena i prostora? (Berčić 2012: 959)

[10] Trobok, 2006, str. 63
[11] Trobok, 2006, str. 63

Možemo lako razabrati da je problem epistemološke prirode pošto nam nije jasno na koji način možemo spoznati takvo nešto. Znanje koje posjedujemo i mi sami smo unutar koncepta vremena i prostora. Teško nam je zamisliti kako možemo biti u bilo kakvom doticaju s nečim što je izvan termina prostora i vremena . Da bi bilo moguće imati znanje o nekom predmetu, on treba imati neki efekt na nas, mi trebamo s njim biti u nekoj vrsti interakcije. Dakle, mogli bi zaključiti da je primarni uvjet za znati nešto, o nečemu, upravo uzročna veza.

Problem s platoničkim entitetima jest u tome što su oni po svojoj definiciji potpuno uzročno izolirani, od nas, pa i od svega ostalog, te stoga ne znamo način na koji bismo ih mogli spoznavati. Kako bi nešto što je dio prostora i vremena moglo djelovati na ono što nije. „Dakle, apsurdna posljedica platonizma jest da matematičko znanje nije moguće, no budući da matematičko znanje očito postoji, trebali bi odbaciti platonizam.“[12] Odnosno, platonizam kao teorija, ne može objasniti matematičko spoznavanje. Možemo prikazati argument ovako:

> “P1: Matematički su predmeti apstraktni.
>
> P2: Apstraktni predmeti ne mogu uzročno djelovati.
>
> P3: Možemo spoznati samo ono što može uzročno djelovati na nas.
>
> K: Ne možemo spoznati matematičke entitete.” (Berčić 2012: 960)

Čini nam se da je konkluzija neprihvatljiva. Svatko bi se složio da matematičko znanje postoji. Dakle, odbacio bi jednu od premisa. Međutim, koju? Oni koji nemaju afiniteta prema platonizmu zasigurno bi odbacili prvu premisu jer je ona u malome platonistički pogled na matematiku. Platonisti bi zasigurno odbacili P2 ili P3. Dvije opcije su moguće, ili se spojiti sa uzročnom teorijom pa tvrditi da i predmeti izvan prostora i vremena mogu imati kauzalnu relaciju s nama ili

[12] Berčić, 2012, str. 960

jednostavno odbaciti u cijelosti uzročnu teoriju znanja kao takvom, odnosno tvrditi da imamo sposobnost spoznati predmete s kojima nismo ni u kakvoj uzročnoj vezi.

> Budući da predmeti koji se navodno nalaze „izvan vremena i prostora“ po definiciji ne mogu uzročno djelovati na nas, prva opcija otpada. Isto tako otpada i druga, jer istinito vjerovanje da p ne može biti znanje, ako nije ni u kakvoj vezi s činjenicom da p. Ono u najboljem slučaju može biti slučajno istinito, a slučajno istinito vjerovanje ne može biti znanje. (Berčić 2012: 960)

Dakle, osnovno pitanje je može li platonizam objasniti matematičku spoznaju? Kako možemo imati znanje o nečemu s čime nismo u uzročnom odnosu? Ukoliko doista slijedi da je tako da ne možemo posjedovati znanje o nečemu s čim nismo u uzročnom odnosu, možda je najbolja solucija jednostavno odbaciti platonizam, pošto ne objašnjava naše posjedovanje matematičkog znanja.

Epistemološki argument protiv platonizma je moćan i razoran. „Platonisti bi trebali dopustiti da su apstraktni entiteti, kao što su entiteti matematike, kauzalno inertni. ... Stoga, ako je neka uzročna veza sa objektom znanja nužni uvjet znanja (kao što uzročna teorija znanja predlaže), matematičko znanje, platonistički zamišljeno, bilo bi nemoguće.“[13] No, zašto se ne bismo upitali da li je uzročna teorija znanja uopće ispravna? Za ilustraciju evo nekih primjera.

> “Znam da se prošle večeri desila automobilska nesreća ispred moje kuće zato jer sam bio u kauzalnom kontaktu sa njom: fotoni sa te scene su ušli na moje oči i dopustili mi da vidim dva automobila razbijena. Ali da nešto znam, ne trebam biti prva veza kauzalnog lanca. Također znam da u srpnju 2006 Hezbollahove rakete su lansirane na sjeverni Izrael iako nikada nisam bio tamo. Znam to jer je netko bio u direktnom kauzalnom kontaktu sa bombardiranjem i snimao, što je vodilo do snimljene vrpce pokazane na televiziji (ili tiskane stranice u novinama) ispred mene i onda

[13] Trobok, 2006, str. 64

do fotona sa televizijskog ekrana (ili stranice novinama) tako ulazeći na moje oči. Tada sam „vidio“ bombardiranje i došao do znanja da se desilo.” (Trobok 2006: 64)

Nakon ilustracije primjera može se vidjeti i da ova teorija ima svoje slabe točke. Sada ću dati detaljniji prikaz same uzročne teorije znanja.

5.1. Uzročna teorija znanja

Osnovnu ideju uzročne teorije znanja izložio je Alvin Goldman u članku „A Causal Theory of Knowing“ iz 1967. „Pitanje koje se postavlja kakva je to veza između naših vjerovanja i činjenica u svijetu. Nešto što bi nam među prvima došlo na um kao mogući odgovor na to pitanje je uzročna veza; da bi netko znao da p njegovo vjerovanje da p mora biti uzrokovano činjenicom da p. ... A zna da p samo ako je A-ovo vjerovanje da p uzrokovano činjenicom da p. Ako A-ovo vjerovanje nije uzrokovano činjenicom da p onda A ne zna da p. Da bi A znao da p njegovo vjerovanje da p mora biti uzrokovano činjenicom da p, a ne nečim drugim; ako je njegovo vjerovanje uzrokovano nečim drugim, onda on ne zna da p.” (Berčić 2012: 18) Dakle, uzročnu teoriju znanja izražavamo sljedećom definicijom:

“A zna da p ako i samo ako:

1) Istina je da p.

2) A vjeruje da p.

3) A-ovo vjerovanje da p uzrokovano je činjenicom da p.” (Berčić 2012: 19)

Možda još konciznije: „A zna da p ako i samo ako je A-ovo vjerovanje da p uzrokovano činjenicom da p.“ Lako bismo mogli prihvatiti ovu teoriju. Osnovna ideja čini se veoma vjerodostojna, međutim, izgleda da teorija ne može objasniti tri vrste slučajeva.

> "Prvo, znanje o budućim događajima. Točnije, mi znamo da će se u budućnosti dogoditi neki događaji, ali oni ne mogu biti uzroci naših vjerovanja jer se još nisu dogodili. Drugo, znanje induktivnih generalizacija. Znamo da svi M jesu N, ali ta činjenica ne može biti uzrok naših vjerovanja jer nismo u kontaktu sa svim M-ovima već samo s ograničenim brojem. Treće, a ovdje najbitnije, znanje nužnih istina. Paradigma su istine matematike, koje nisu fizičke činjenice koje mogu nešto uzrokovati, a ipak imamo znanje o njima." (Berčić 2012: 19)

Da stanemo u obranu uzročne teorije znanja. Pitanje je koja je težina navedenih prigovora. Da li oni obaraju uzročnu teoriju znanja? Što bi zastupnik ove teorije mogao odgovoriti na prigovore koji se nude. Berčić smatra da navedeni prigovori ne obaraju uzročnu teoriju znanja.

> "Istina je da naša vjerovanja o budućim događajima nisu uzrokovana tim budućim događajima, ali to ne znači da nema nikakve uzročne veze između tih događaja i naših vjerovanja o njima. „Ako ekonomist u 2008. predviđa da će u 2009. biti recesija možemo reći da on to zna samo ako je njegovo vjerovanje da će u 2009. biti recesija uzrokovano onim istim faktorima koji će uzrokovati recesiju u 2009." „Isto tako, astronom zna da će se 21.1.2100. dogoditi djelomična pomrčina Sunca samo ako je njegovo vjerovanje da će se 21.1.2100. dogoditi djelomična pomrčina Sunca uzrokovano onim istim faktorima koji će 21.1.2100. uzrokovati djelomičnu pomrčinu Sunca. Drugim riječima, da bi vjerovanje da p bilo znanje, nije nužno da ono bude uzrokovano činjenicom da p, dovoljno je i da vjerovanje da p i činjenica da p imaju zajednički uzrok. To je još sasvim u duhu uzročne teorije znanja. Slična analiza vrijedi i za slučajeve induktivne generalizacije. Ako postoji neka strukturalna sličnost između svih M-ova, i ako svi M jesu N upravo zbog te sličnosti, onda nije potrebno da budemo u kontaktu sa svim M-ovima, dovoljno je da smo u uzročnom kontaktu s nekim M-ovima. (Berčić 2012: 19)

Ako su navedeni odgovori valjani onda je uzročna teorija znanja ipak održiva. Smatram da se pravi problem nalazi u epistemičkoj komponenti matematičkog platonizma, a ne toliko uzročnoj teoriji znanja. Nije nam jasan način kako bi postojala veza između apstraktnih matematičkih entiteta i našeg znanja koje je navodno o njima, neovisno o formulaciji i razvitku uzročne teorije. Nakon Benaceraffa, teret dokazivanja još uvijek je na platonistu.

Međutim, neki autori smatraju da uzročna veza nije ni potrebna za znanje. U prilog svojoj tezi navode eksperiment Einsteina, Podolskog i Rosena.

> “Razmotrimo eksperiment u kojem proces raspada izrodi dva protona koji se kreću u suprotnim smjerovima prema dva detektora od kojih je svaki smješten na jednom kraju sobe. Čak i ako su čestice odvojene jedna od druge arbitrarno velikom udaljenosti i ne mogu više komunicirati jedna s drugom, istinito je da: ako z-komponenta spina za jednu česticu (nazovimo ju čestica 1) jest gore, onda druga čestica (čestica 2) ima spin dolje, i obrnuto. Rezultat za česticu 1 implicira rezultat za česticu 2. Međutim, dok su Einstein, Podolsky i Rosen objasnili fenomen postulirajući skrivene varijable čije su vrijednosti bile namještene prije eksperimenta, kasnije se dokazalo da ovaj postulat vodi do rezultata različitih za oboje, kvantnu mehaniku i eksperimentalne rezultate za korelaciju spinova protonskih parova. To znači da čitajući rezultate jednog detektora, znamo istoga trena rezultate drugog detektora bez da smo na bilo koji način kauzalno povezani sa potonjim.” (Trobok 2006: 65)

Još uvijek smatram da je uzročna veza važna komponenta za znanje, no, od ove točke postaje jasno da onaj koji nudi epistemološki argument u borbi protiv platonizma nije dobio rat, a možda ni ovu bitku. Čak i kada bi rastegnuo svoju kauzalnu teoriju znanja da pokrije i ovaj primjer iz kvantne mehanike, obvezanost obrazlaganja je prebačena.[14] S ovime završavam epistemološki dio i krećem na ontološki dio rasprave.

6. Ontološka obaveza

Kada govorimo o matematičkim entitetima izgleda da pretpostavljamo njihovo postojanje. O brojevima, funkcijama, skupovima i ostalome mislimo i govorimo kao o predmetima koji objektivno postoje. Intuitivno nam se čini da broj postoji objektivno i nezavisno od nas. To nam daje do znanja da je matematički svijet ipak obojen platonistički. Jezikom kojim pričamo o matematičkim entitetima implicira se da „platoničko nebo“ matematičkih entiteta doista postoji, i da postoji neovisno od nas. No, što nam to ukazuje?

> Budući da se radi samo o načinu na koji govorimo, ova činjenica možda i nema neku težinu. No, ona barem primarno podržava platonizam. Platonist smatra da je prirodno pretpostaviti da doista postoje matematički entiteti, da rečenice matematike govore o njima i da su oni to što ih čini istinitima. Drugačije rečeno, da postoji posebna matematička stvarnost koju rečenice matematike odražavaju, opisuju ili izražavaju i koja postoji potpuno neovisno o tim rečenicama i o nama koji ih izričemo. Kada rečenice matematike ne bi odražavale matematičku stvarnost, zašto bi onda matematički diskurs bio platonistički? Mora biti da postoji neki razlog zbog kojega on jest platonistički i zbog kojega nas ontološki obvezuje na postojanje matematičkih predmeta. Platonist smatra da očiti odgovor jest da matematički predmeti doista postoje. (Berčić, 2012: 952)

[14] Trobok, 2006, str. 66

Berčić je ovdje fino pokazao suštinu ovog argumenta. Sumirano, platonist smatra da sama pretpostavka da postoji matematički realitet jest dovoljno jasan i najbolji dokaz toga da matematički diskurs doista je platonistički. Kada matematika ne bi odražavala takvu objektivnu i zasebno egzistirajuću stvarnost matematičkih entiteta, onda njezin diskurs ne bi ni bio platonistički.

> Ontološka obaveza matematike jednaka je ontološkoj obavezi šaha, briškule, pokera, romana ili filma. Radi se o postojanju u okviru konvencije. Sasvim je jednostavno objasniti takvo minimalno postojanje, ono je ontološki potpuno bezazleno. Entiteti matematike jednako su „realni" kao i entiteti šaha, briškule, epa ili drame. Pravila zbrajanja jednako su „realna" kao i pravila rukometa ili kriketa. I jedna i druga isključivo su stvar konvencije. Dojam da je matematika "realnija„ od igara isključivo je stvar rasprostranjenosti. Kada bi se briškula podučavala u svim školama od prvog osnovne, i studirala na svim sveučilištima, isto bismo tako imali dojam da je duja baštoni ipak na neki način realna i da ne može biti samo produkt naše konvencije. Razlika je sociološka i psihološka, a ne ontološka. Jasno, pitanje je jesu li brojevi, skupovi i funkcije u matematici realni u istom smislu u kojem je realan lovac u šahu, duja baštoni u briškuli, glavni lik u romanu ili meksičkoj sapunici? Postoje li na isti način? (Berčić 2012: 954)

Pokušaji davanja istog ontološkog statusa i identificiranje entiteta i pravila matematike sa pravilima i entitetima drugih koncepata i polja mi nikako ne prolazi. Ne mogu si predstaviti matematiku samo kao zbir konvencija, dogovorenih i revidiranih od strane matematičara kroz neko vrijeme. Bez obzira na naše konvencije, Pitagorin poučak bi postojao i vrijedio, negdje, na neki način. Entiteti matematike ne čine mi se jednako realni kao entiteti šaha ili dame. Smatram da matematika ima poseban ontološki status, a nije samo zbir naših konvencija. Nakon ovog kratkog uvoda u ontološku raspravu krećem na samu problematiku.

7. Redukcija u matematici

Bencarraf je zaslužan i za ontološki problem za platonizam. Zove se „problem neodređenosti“. Možemo ga predstaviti ovako.

„Kako je moguće svesti bilo koje polje matematike na teoriju skupova, možemo na taj način reducirati i brojeve. Međutim, postoje nekoliko mogućih redukcija aritmetike na teoriju skupova. Platonizam izgleda ima takve konzekvence da je više od jedna od tih redukcija točna. Ali postavlja se pitanje kako je to moguće?“ (Trobok 2006: 68)

Mnogima je poznato da u klasičnoj matematici postoji mogućnost reduciranja bilo kojeg polja matematike na teoriju skupova. „To znači da brojevi sami mogu biti identificirani sa određenim skupovima i da teoremi o njima mogu biti dokazani preko aksioma teorije skupova.“[15] No, isto tako je moguće identificirati brojeve sa skupovima na različite načine od koje su dvije poznate identifikacije sa Zaremlovim rednim brojevima i von Neumannovim rednim brojevima.“[16] To bi otprilike izgledalo ovako.

Zarmelova redkucija	von Neumannova redukcija
$0 = \emptyset$ $1 = \{ \emptyset \}$ $2 = \{\{ \emptyset \}\}$ $3 = \{\{\{ \emptyset \}\}\}$ . . .	$0 = \emptyset$ $1 = \{ \emptyset \}$ $2 = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$ $3 = \{ \emptyset, \{ \emptyset \}, \{ \emptyset, \{ \emptyset\}\} \}$ . . .

[15] Trobok, 2006,str. 66

[16] Trobok, 2006. str 67

U matematici ove višestruke redukcije ne stvaraju neki problem. Obje redukcije, kao i bilo koje druge moguće su jednako korisne i ne postoji ništa u teoriji brojeva što čini jednu redukciju boljom od druge. Za filozofiju matematike, a posebno iz pogleda platonizma u filozofiji matematike, ove višestruke redukcije teorije skupova su problematične. Platonizam uzima trenutne ontološke obaveze matematike kao nominalnu vrijednost i gleda ih kao privržene za apstraktne objekte. Dakle, obvezani su na postojanje brojeva u jednu ruku, i skupova u drugu. (Trobok 2006: 67)

Ali ako su oboje brojevi i skupovi objekti, nisu ništa manje nezavisni od naše matematičke prakse kao bilo koje drugo svojstvo svijeta apstraktnih matematičkih entiteta. Mogućnost identificiranja broja 2 sa dva različita objekta- sa skupom {{ Ø }} kao kod Zarmela ili sa skupom { Ø, { Ø }} kao kod Neumanna, ne može se više gledati kao zdravo bogatstvo resursa. To postaje zabrinjavajuća neodređenost. Koji od ovih skupova je broj 2 identičan je ozbiljno pitanje? (Trobok 2006: 67)

Postavlja se pitanje, koje matematičke činjenice bi presudile da je recimo Zarmelova redukcija točna, a von Neumannova nije? „Platonizam izgleda da ima jednu lažnu posljedicu, a ta posljedica jest da na određena pitanja identiteta daje definitivne odgovore, kada u stvari to nema.“[17] Pomislilo bi se da platonizam ima laki odgovor na ovaj problem, a taj je da brojevi nisu skupovi. Međutim, ovaj odgovor mnogima bi se učinio nezadovoljavajući. Problem neodređenosti je konkretan i nezanemariv, a pitanje ostaje. „Ukoliko je moguće reducirati matematičku aritmetiku na teoriju skupova na različite načine, a vidjeli smo da jest, koji objekti su onda prirodni brojevi?“[18] Ostavit ćemo platoniste da se nećkaju oko ovog pitanja.

[17] Trobok, 2006, str. 68
[18] Trobok, 2006, str. 68

8.Pozicija Kurta Gödela

Za kraj prikazat ću pogled na platonizam Kurta Gödela koji mi se samom dopao i kojeg bi zastupao. No, prije nego što uđem u samu razradu kao kratak uvod reći ću nešto o percepciji platoničkih predmeta i kako dolazimo do spoznaja o njima. Dakle, uvidjeli smo da prigovor koji se daje platonizmu općenito, pa tako i u matematici, je prvenstveno epistemički. Nešto što je naturalistima, pa i ostalima nekako najteže za progutati je platonistička epistemologija. Platoničke intuicije i način njihova „zahvatanja" smatraju najblaže rečeno, nevjerojatnima. Naravno prigovori idu na to da apstraktni platonički entiteti postoje izvan vremena i prostora. No, ono što ih bode još više i preko čega teško mogu proći tiče se sposobnosti njihovog percipiranja. „Ugrubo, platonisti smatraju da platoničke entitete možemo percipirati, naturalisti inzistiraju da ne možemo."[19]

Originalni platonist, odnosno Platon sam, pretpostavio je mnogima u potpunosti neplauzibilnu epistemologiju koja uključuje besmrtne duše koje su prije postojale u apstraktnom svijetu. Te duše došle su do znanja matematičkih entiteta direktno, ali su zaboravile ono što znaju kada su se rodile i sada u novom obliku prisjećaju se komadića i dijelova čega su zaboravile. (Brown 2012: 95)

Međutim, suvremeni platonisti pozivaju se na ideju i mogućnost percipiranja platoničkih entiteta. Oni govore o pojmovima „ zahvaćanja", ili „ intuicije", ili „gledanja" apstraktnih entiteta sa „umnim okom".[20] „Vjerojatno to misle metaforički, ali ideja ostaje, a to je da postoji mogućnost specifične vrste percepcije objekata matematičkog istraživanja.

[19] Brown, 2012,str. 94
[20] Brown, 2012, str. 95

Ali, možda matematički platonist ne treba ići tako daleko u teoriji da vidi sve matematički istine na taj način i takvim spoznajnim aparatom. Možda bi bilo dovoljno da vidi neke, odnosno da se „obveže na percepciju samo nekih matematičkih objekta i samo nekih matematičkih činjenica“ od kojih onda sintetizira dalje.[21] Približno analogna situacija je u prirodnim znanostima. „Ono što vidimo može biti iskorišteno kao dokaz za teorije koje ne vidimo.“[22] Ovo nas dovodi do Gödelova tipa platonizma koji sam spomenuo ranije.

Kurt Gödel značajan je (između ostalog) što je povezao epistemologiju matematike sa epistemologijom prirodnih znanosti u dva važna aspekta. Kao prvo, imamo intuicije ili matematičke percepcije koje su kontraparnjaci osjetilnog iskustva u fizičkom svijetu. Drugo, mi evaluiramo neke matematičke aksiome na bazi njihovih posljedica, specijalno po onima koje možemo zahvatiti intuicijom, isto kao što evaluiramo teorije u fizici ili biologiji na bazi njihovih empirijskih posljedica. Nitko ne može vidjeti subatomske čestice, ali možemo vidjeti liniju spektra i pruge u oblaku ćelije. Nitko ne može vidjeti evoluciju, ali možemo vidjeti fosile i geografsku distribuciju vrsta sa različitim karakteristikama. Ono što možemo vidjeti je dokaz za teorije o tome što ne možemo vidjeti. (Brown 2012: 96)

Na taj način, tvrdi Gödel, „intuicije su dokazi za pretpostavljanje aksioma u matematici.“[23] Intuicije nam otvaraju put za razvijanje aksioma. Međutim , iz Gödelove pozicije matematika je pogrešiva. U pretpostavci aksioma postoji mogućnost pogreške. Na isti način kao što dolazi do pogreška u osjetilnom iskustvu tako može doći i do pogrešnih intuicija. Štoviše, „lažne premise mogu imati istinite posljedice, stoga testiranje aksioma nije također sigurno, čak i kada su naše intuicije točne.“[24] Matematičar može imati krivu pretpostavku aksioma,

[21] Brown, 2012,, str 95
[22] Brown, 2012,str. 96
[23] Brown, 2012, str. 96
[24] Brown, 2012, str. 96

ali to ne znači da njegova intuicija nije bila točna. Analogno je sa osjetilnim iskustvom i prirodnim znanostima.

„Klase i koncepti mogu također biti zamišljene kao stvarni objekti…postojati nezavisno od naših definicija i konstrukcija. Čini mi se da je pretpostavka takvih objekta sasvim legitimna kao pretpostavka fizičkih tijela i postoji sasvim jednak razlog da se vjeruje u njihovu egzistenciju. One su u istom smislu nužne da ostvare zadovoljavajući sistemi matematike kao što su fizička tijela nužna za zadovoljavajuću teoriju naših osjetilnih percepcija.“ (Gödel 1944: 456)

Gödel želi reći da su intuicije jednako potrebne da bi se ostvarili uspješni matematički sistemi, kao što su prirodnoj znanosti potrebni fizički objekti za ostvarenje uspješne znanstvene teorije. Ovo je i nešto što bi vjerojatno prihvatio moderni matematički platonist. Na isti način na koji možemo vidjeti fizičke objekte, isto tako možemo intuicijom zahvatiti neke matematičke entitete. I na isti način kako možemo vidjeti da je more plavo, a cesta ravna, možemo i intuicijom spoznati da su određeni matematički iskazi istiniti.

9. Zaključak:

Iskazi matematike oduvijek su bili u centralnom interesu filozofskih razmatranja. Pitanja poput: „Kako spoznajemo matematičke entitete?“, „Što iskaze matematike čini istinitima?“ „Od kuda dolaze te istine?“ i danas su otvorena, rasprave su žive, polemika je još uvijek aktualna i relevantna. Mnogi autori se nalaze unutar određenih tabora gdje pozicioniraju svoje mišljenje. U svom radu predstavio sam dvije takve pozicije, platonizma i naturalizma.

Naturalizam je skloniji znanstvenim metodama istraživanja i od tuda crpi svoje postulate, dok platonizam interpretira zasebnu matematičku stvarnost u kojoj entiteti postoje izvan našeg prostorno-vremenskog okvira. Između ove dvije pozicije, ne mogu se pozicionirati. Obje pozicije imaju svoje prednosti i nedostatke. Pošto sam znanstveno orijentiraniji, skloniji sam poziciji poput naturalizma, međutim, smatram da matematika (i uz nju logika) zaslužuju specifičan status. Vidim Benacerrafov argument kao čvrst i oštar, ali ne i dovoljno jak da svlada platonizam. Ontološki argument nije zanemariv, ali mislim da su platonisti unatoč njemu, još uvijek na stabilnim nogama. Najbliža mi je pozicija (i ona koju zastupam) pozicija Kurta Gödela. Ostajem na njegovoj strani zbog načina na koji je Kurt Gödel povezao i napravio korelaciju između metoda prirodnih znanosti i specifičnog načina zahvaćanja matematičkih istina u domeni jednog platonista.

9. Literatura:

Benacerraf, Paul, 1973, “Mathematical Truth”, *The Journal of Philosophy,* Vol. LXX, No. 19.

Brown, James Robert, 2012, *Platonism, Naturalism, and Mathematical Knowledge*, Routledge.

Trobok, Majda, 2006, *Platonism in Philosophy of Mathematics*, Filozofski fakultet Rijeka.

Berčić, Boran, 2012, *Filozofija: svezak drugi*, Ibis grafika, Zagreb.